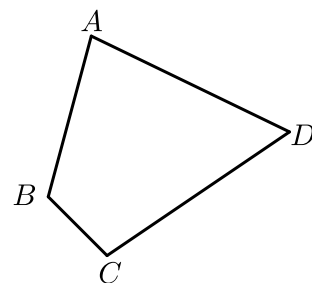


第2讲 旋转综合（练习）

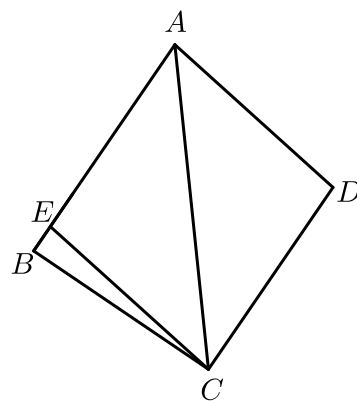
一、 旋转之对角互补模型

练习

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD = CD$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\angle ADC = 60^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 3$ ，则四边形 $ABCD$ 的面积为 _____ 。

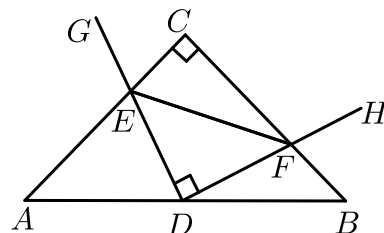


2. 如图，已知四边形 $ABCD$ 的对角互补，且 $\angle BAC = \angle DAC$ ， $AB = 15$ ， $AD = 12$ 。过顶点 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ，则 $\frac{AE}{BE} =$ _____ 。

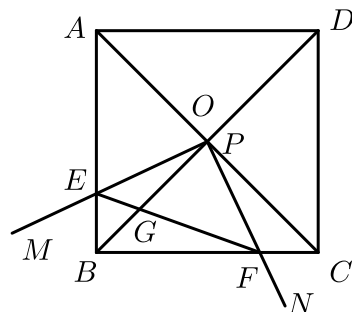


练习

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, 点 D 为 AB 中点. $\angle GDH = 90^\circ$, $\angle GDH$ 绕点 D 旋转, DG, DH 分别与边 AC, BC 交于 E, F 两点. 下列结论: ① $AE + BF = AC$, ② $AE^2 + BF^2 = EF^2$, ③ $S_{\text{四边形}CEDF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, ④ $\triangle DEF$ 始终为等腰直角三角形. 其中正确的是().



- A. ①②③④ B. ①②③ C. ①④ D. ②③
4. 如图所示, 边长为1的正方形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O . 有直角 $\angle MPN$, 使直角顶点 P 与点 O 重合, 直角边 PM, PN 分别与 OA, OB 重合, 然后逆时针旋转 $\angle MPN$, 旋转角为 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), PM, PN 分别交 AB, BC 于 E, F 两点, 连接 EF 交 OB 于点 G , 有下列结论: ① $\triangle OEB \cong \triangle OFC$; ② $EF = \sqrt{2}OE$; ③ $S_{\text{四边形}BEOF} : S_{\text{正方形}ABCD} = 1 : 4$; ④ $BE + BF = \sqrt{2}OA$; 其中正确的个数是().



- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

练习

5. 在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分 $\angle DAB$.

(1) 如图1，当 $\angle DAB = 120^\circ$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ 时，发现： $AB + AD$ _____ AC (填写 “<”，“=”，“>”) .

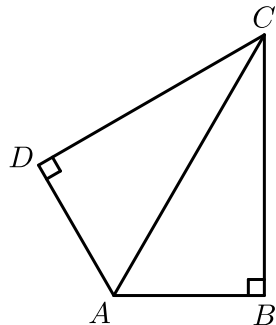


图1

(2) 如图2，当 $\angle DAB = 120^\circ$ ， $\angle B$ 和 $\angle D$ 互补时，线段 AB 、 AD 、 AC 在(1)式中的数量关系是否还成立，写出你的猜想，并给予证明 .

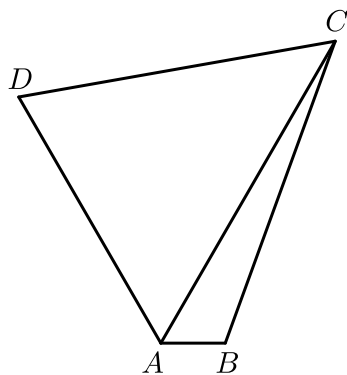


图2

(3) 如图3，当 $\angle DAB = 90^\circ$ ， $\angle B$ 和 $\angle D$ 互补， $AB = 3$ ， $AD = 1$ 时， $AC =$ _____ .

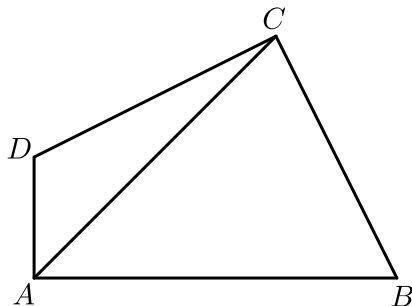
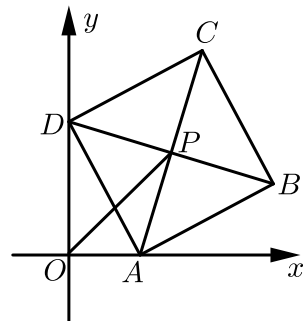


图3

6. 已知：如图，平面直角坐标系 xOy 中，正方形 $ABCD$ 的边长为4，它的顶点 A 在 x 轴的正半轴上运动，顶点 D 在 y 轴的正半轴上运动（点 A ， D 都不与原点重合），顶点 B ， C 都在第一象限，且对角线 AC ， BD 相交于点 P ，连接 OP 。

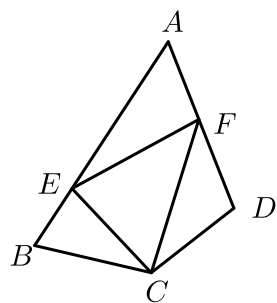


- (1) 当 $OA = OD$ 时，点 D 的坐标为 _____， $\angle POA =$ _____ $^{\circ}$ 。
 (2) 当 $OA < OD$ 时，求证： OP 平分 $\angle DOA$ 。
 (3) 设点 P 到 y 轴的距离为 d ，则在点 A ， D 运动的过程中， d 的取值范围是 _____。

二、 旋转之角含半角模型

练习

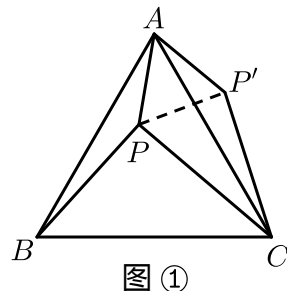
7. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $BC = CD$ ， $\angle BCD = 120^{\circ}$ ， E ， F 分别为 AB ， AD 上的点， $\angle ECF = \angle A = 60^{\circ}$ 。



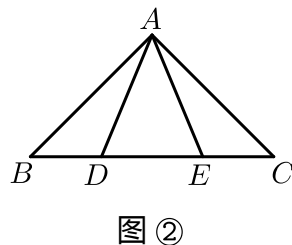
- (1) 求证： $EF = BE + DF$ 。
 (2) 求证：点 C 在 $\angle BAD$ 的平分线上。

8. 阅读下面的材料：

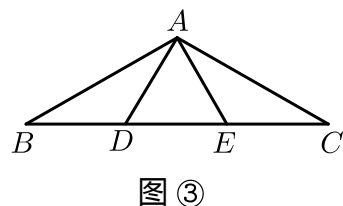
- (1) 如图①，在等边三角形 ABC 内，点 P 到顶点 A, B, C 的距离分别是3、4、5，则 $\angle APB =$ _____ $^{\circ}$. 由于 PA, PB, PC 不在同一三角形中，为了解决本题，我们可以将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 到 $\triangle ACP'$ 处，连接 PP' ，此时， $\triangle ACP' \cong$ _____ 就可以利用全等的知识，进而将三条线段的长度转化到一个三角形中，从而求出 $\angle APB$ 的度数 .



- (2) 请你利用第(1)题的解答方法解答：如图②， $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 90^{\circ}$ ， $AB = AC$ ， D, E 为 BC 上的点，且 $\angle DAE = 45^{\circ}$ ，求证： $BD^2 + EC^2 = DE^2$.

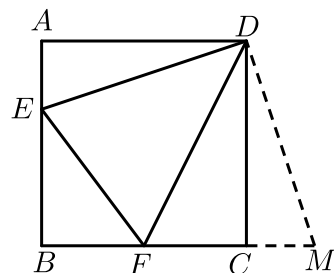


- (3) 如图③，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 120^{\circ}$ ， $AB = AC$ ， $\angle EAD = 60^{\circ}$ ， $BC = 3 + \sqrt{3}$. 若以 BD, DE, EC 为边的三角形是直角三角形时，求 BE 的长 .

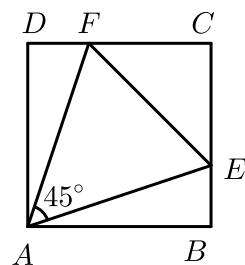


练习

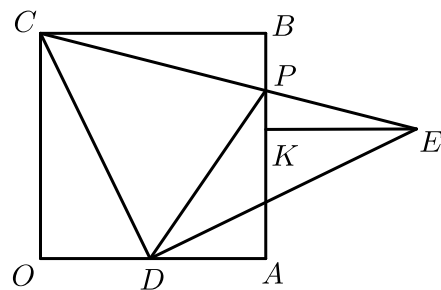
9. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为3， E ， F 分别是 AB ， BC 边上的点，且 $\angle EDF = 45^\circ$ ．将 $\triangle DAE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle DCM$ ．若 $AE = 1$ ，则 FM 的长为 _____ ．



10. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 上的点， $\angle EAF = 45^\circ$ ， $\triangle ECF$ 的周长为4，则正方形 $ABCD$ 的边长为 _____ ．

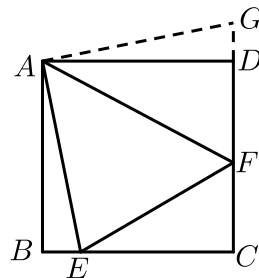


11. 如图，四边形 $OABC$ 为正方形，在 OA 边上有一点 D ，以 CD 为直角边构造等腰 $\text{Rt}\triangle CDE$ ， CE 交 AB 于点 P ，过点 E 作 AB 垂线交 AB 于 K ，若 $BP = 4$ ， $PD = 10$ 且 $OC + EK = 18$ ，则 PK 的长度为 _____ ．



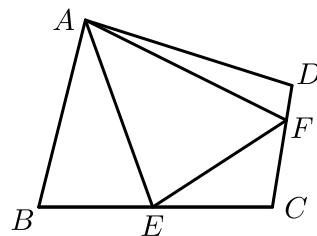
12. 问题：如图(1)，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，试判断 BE 、 EF 、 FD 之间的数量关系。

- (1) 小聪把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$ ，从而发现 $EF = BE + FD$ ，请你利用图(1)证明上述结论。



图(1)

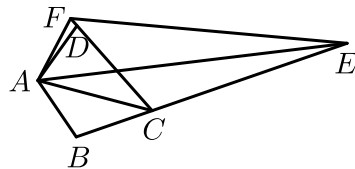
- (2) 如图(2)，四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD \neq 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，则当 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ 时，证明： $EF = BE + FD$ 。



图(2)

练习

13. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle ADC = 180^\circ$ ， E 、 F 分别是边 BC 、 CD 延长线上的点， $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$ ，若 $DF = 1$ ， $BE = 5$ ，则线段 EF 的长为（ ）。



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

14. 四边形 $ADBC$ 是由等边 $\triangle ABC$ 和顶角为 120° 的等腰 $\triangle ABD$ 拼成，将一个 60° 角顶点放在 D 处，将 60° 角绕 D 点旋转，该 60° 角两边分别交直线 BC 、 AC 于 M 、 N 。

- (1) 当 M 、 N 分别在线段 BC 和线段 AC 上时 (如图1)，判断线段 BM 、 AN 、 MN 之间的数量关系，并证明你的结论。

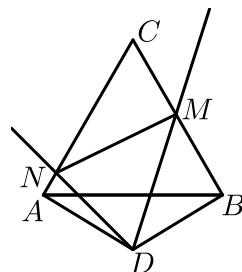


图 1

- (2) 当 M 、 N 分别在线段 BC 和线段 CA 的延长线上时 (如图2)，直接写出线段 BM 、 AN 、 MN 之间的数量关系，并证明你的结论。

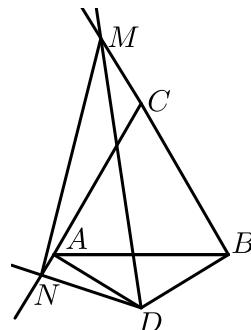
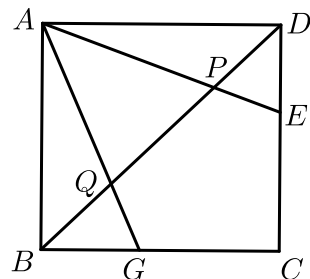


图 2

练习

15. 如图，点 E 、 G 分别是正方形 $ABCD$ 的边 CD 、 BC 上的点，连接 AE 、 AG 分别交对角线 BD 于点 P 、 Q ，若 $\angle EAG = 45^\circ$ ， $BQ = 4$ ， $PD = 3$ ，则正方形 $ABCD$ 的边长为 _____。



16. 通过类比联想，引申拓展研究典型题目，可达到解一类题的目的，下面是一个案例，请补充完整．

原题：如图1，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，试猜想 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系．

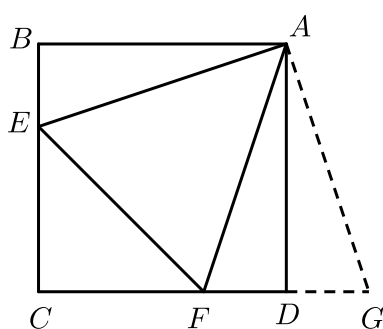


图 1

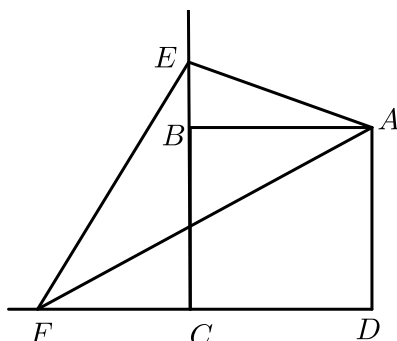


图 2

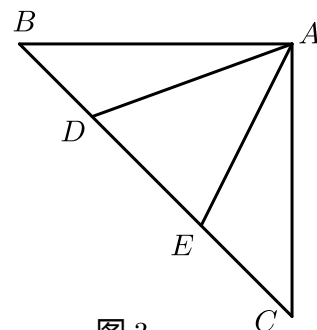


图 3

(1) 思路梳理

把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$ ，可使 AB 与 AD 重合，由 $\angle ADG = \angle B = 90^\circ$ ，得 $\angle FDG = 180^\circ$ ，即点 F 、 D 、 G 共线，易证 $\triangle AFG$ _____，故 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系为 _____．

(2) 类比引申

如图2，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 CB 、 DC 的延长线上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，试猜想 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系为 _____，并给出证明．

(3) 联想拓展

如图3，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D 、 E 均在边 BC 上，且 $\angle BAD + \angle EAC = 45^\circ$ ，若 $BD = 3$ ， $EC = 6$ ，求 DE 的长．